AQM1-4
chp2, sec3: Simple Harmonic Oscillator

Yousef Pezeshkian

نوسانگر هماهنگ ساده

$$\boxed{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}}$$

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right), \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right),$$

known as the **annihilation operator** and the **creation operator**

$$[a, a^\dagger] = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)(-i[x, p] + i[p, x]) = 1$$

$$N = a^\dagger a = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)\left(x^2 + \frac{p^2}{m^2\omega^2}\right) + \left(\frac{i}{2\hbar}\right)[x, p] = \frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{H = \hbar\omega\left(N + \tfrac{1}{2}\right)}$$

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right)$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right)$$

$$N = a^\dagger a$$

$$H = \hbar\omega\left(N + \tfrac{1}{2}\right). \qquad (2.3.6)$$

Because H is just a linear function of N, N can be diagonalized simultaneously with H. We denote an energy eigenket of N by its eigenvalue n, so

$$N|n\rangle = n|n\rangle. \qquad (2.3.7)$$

We will later show that n must be a nonnegative integer. Because of (2.3.6) we also have

$$H|n\rangle = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega|n\rangle, \qquad (2.3.8)$$

$$E_n = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

معنای فیزیکی a و a†

$$[N, a] = [a^\dagger a, a] = a^\dagger [a, a] + [a^\dagger, a] a = -a, \qquad (2.3.10)$$

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger.$$

$$\begin{aligned} N a^\dagger |n\rangle &= \left([N, a^\dagger] + a^\dagger N\right)|n\rangle \\ &= (n+1) a^\dagger |n\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N a |n\rangle &= \left([N, a] + a N\right)|n\rangle \\ &= (n-1) a |n\rangle \end{aligned}$$

These relations imply that $a^\dagger|n\rangle(a|n\rangle)$ is also an eigenket of N with eigenvalue increased (decreased) by one. Because the increase (decrease) of n by one amounts to the creation (annihilation) of one quantum unit of energy $\hbar\omega$, the term *creation operator* (*annihilation operator*) for $a^\dagger(a)$ is deemed appropriate.

$$Na|n\rangle = (n-1)a|n\rangle \longrightarrow a|n\rangle = c|n-1\rangle$$

$$\langle n|a^{\dagger}a|n\rangle = |c|^2$$

$$N = a^{\dagger}a \longrightarrow \boxed{n = |c|^2}$$

$$\boxed{a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$\boxed{a^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle}$$

$$a^2|n\rangle = \sqrt{n(n-1)}\,|n-2\rangle,$$

$$a^3|n\rangle = \sqrt{n(n-1)(n-2)}\,|n-3\rangle,$$

$$\vdots$$

we also have the positivity requirement for the norm of $a|n\rangle$:

$$n = \langle n|N|n\rangle = \left(\langle n|a^{\dagger}\right)\cdot\left(a|n\rangle\right) \geq 0$$

یعنی n هیچ وقت نمی تواند منفی باشد! در نتیجه فرآیند اثر دادن عملگر a در یک جایی پایان می پذیرد. کمینه مقدار ممکن برای اعداد صحیح غیر منفی، صفر می باشد. بدین ترتیب انرژی حالت پایه نوسانگر هارمونیک از رابطه مقابل به دست می آید: $\boxed{E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega}$

با اثر دادن متوالی عملگر $a^{\dagger}$ به حالت پایه $|0\rangle$

$$|1\rangle = a^{\dagger}|0\rangle,$$

$$|2\rangle = \left(\frac{a^{\dagger}}{\sqrt{2}}\right)|1\rangle = \left[\frac{(a^{\dagger})^2}{\sqrt{2}}\right]|0\rangle,$$

$$|3\rangle = \left(\frac{a^{\dagger}}{\sqrt{3}}\right)|2\rangle = \left[\frac{(a^{\dagger})^3}{\sqrt{3!}}\right]|0\rangle,$$

$$\vdots$$

$$|n\rangle = \left[\frac{(a^{\dagger})^n}{\sqrt{n!}}\right]|0\rangle.$$

$\boxed{a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle}$ $\boxed{a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle}$

From (2.3.16), (2.3.17), and the orthonormality requirement for $\{|n\rangle\}$, we obtain the matrix elements

$$\langle n'|a|n\rangle = \sqrt{n}\,\delta_{n',\,n-1}, \qquad \langle n'|a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,\delta_{n',\,n+1}. \tag{2.3.23}$$

Using these together with

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^\dagger), \qquad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,(-a + a^\dagger), \tag{2.3.24}$$

we derive the matrix elements of the x and p operators:

$$\langle n'|x|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\left(\sqrt{n}\,\delta_{n',\,n-1} + \sqrt{n+1}\,\delta_{n',\,n+1}\right), \tag{2.3.25a}$$

$$\langle n'|p|n\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,\left(-\sqrt{n}\,\delta_{n',\,n-1} + \sqrt{n+1}\,\delta_{n',\,n+1}\right). \tag{2.3.25b}$$

ویژه توابع نوسانگر هماهنگ

The operator method can also be used to obtain the energy eigenfunctions in position space. Let us start with the ground state defined by

$$a|0\rangle = 0, \tag{2.3.26}$$

which, in the x-representation, reads

$$\langle x'|a|0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\langle x'|\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right)|0\rangle = 0. \tag{2.3.27}$$

Recalling (1.7.17), we can regard this as a differential equation for the ground-state wave function $\langle x'|0\rangle$:

$$\left(x' + x_0^2\frac{d}{dx'}\right)\langle x'|0\rangle = 0, \tag{2.3.28}$$

where we have introduced

$$x_0 \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \tag{2.3.29}$$

which sets the length scale of the oscillator.

We see that the normalized solution to (2.3.28) is

$$\boxed{\langle x'|0\rangle = \left(\frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{x_0}}\right)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x'}{x_0}\right)^2\right]. \qquad (2.3.30)}$$

We can also obtain the energy eigenfunctions for excited states by evaluating

$$\langle x'|1\rangle = \langle x'|a^\dagger|0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}\,x_0}\right)\left(x' - x_0^2\frac{d}{dx'}\right)\langle x'|0\rangle,$$

$$\langle x'|2\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\langle x'|(a^\dagger)^2|0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2!}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,x_0}\right)^2\left(x' - x_0^2\frac{d}{dx'}\right)^2\langle x'|0\rangle, \ldots$$

$$(2.3.31)$$

In general, we obtain

$$\langle x'|n\rangle = \left(\frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{2^n n!}}\right)\left(\frac{1}{x_0^{n+1/2}}\right)\left(x' - x_0^2\frac{d}{dx'}\right)^n\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x'}{x_0}\right)^2\right].$$

$$(2.3.32)$$

تمرین: اصل عدم قطعیت در حالت پایه ی نوسانگر هماهنگ ساده

با نوشتن عملگر x^2 و p^2 بر حسب عملگرهای افزاینده و کاهنده، و محاسبه ی اثر آنها بر حالت پایه ی نوسانگر هماهنگ ساده، اصل عدم قطعیت را بررسی کنید.

روابط را برای حالت برانگیخته ی n ام بررسی کنید و رابطه ی عدم قطعیت را به دست آورید.

تحول زمانی نوسانگر هماهنگ

به سراغ تصویر هایزنبرگ می رویم (تحول عملگرها)

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[p_i, V(\mathbf{x})] = -\frac{\partial}{\partial x_i}V(\mathbf{x})$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{p_i}{m}$$

$$\frac{dp}{dt} = -m\omega^2 x$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}$$

معادلات در هم تنیده فوق با رفتن به سراغ عملگرهای افزاینده و کاهنده، به دو معادله ی منفک از هم تبدیل می شوند:

$$\boxed{\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\frac{p}{m} - i\omega x\right) = -i\omega a}$$

$$\boxed{\frac{da^\dagger}{dt} = i\omega a^\dagger}$$

$$\boxed{a(t) = a(0)\exp(-i\omega t) \quad \text{and} \quad a^\dagger(t) = a^\dagger(0)\exp(i\omega t). \quad (2.3.43)}$$

$$x(t)+\frac{ip(t)}{m\omega}=x(0)\exp(-i\omega t)+i\left[\frac{p(0)}{m\omega}\right]\exp(-i\omega t),$$
$$x(t)-\frac{ip(t)}{m\omega}=x(0)\exp(i\omega t)-i\left[\frac{p(0)}{m\omega}\right]\exp(i\omega t). \tag{2.3.44}$$

Equating the Hermitian and anti-Hermitian parts of both sides separately, we deduce

$$\boxed{x(t)=x(0)\cos\omega t+\left[\frac{p(0)}{m\omega}\right]\sin\omega t} \tag{2.3.45a}$$

$$\boxed{p(t)=-m\omega x(0)\sin\omega t+p(0)\cos\omega t} \tag{2.3.45b}$$

تحول زمانی نوسانگر هماهنگ (روش ۲)

$$x(t)=\exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right)x(0)\exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right)$$

$$\exp(iG\lambda)A\exp(-iG\lambda) = A + i\lambda[G,A] + \left(\frac{i^2\lambda^2}{2!}\right)[G,[G,A]] + \cdots + \left(\frac{i^n\lambda^n}{n!}\right)[G,[G,[G,\ldots[G,A]]]\ldots] + \cdots$$

where G is a Hermitian operator and λ is a real parameter. We leave the proof of this formula, known as the **Baker-Hausdorff lemma** as an exercise.

$$\exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right)x(0)\exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right) = x(0)+\left(\frac{it}{\hbar}\right)[H,x(0)]+\left(\frac{i^2t^2}{2!\hbar^2}\right)[H,[H,x(0)]]+\cdots$$

با جایگذاری $[H,x(0)]=\dfrac{-i\hbar p(0)}{m}$ and $[H,p(0)]=i\hbar m\omega^2 x(0)$

همان نتایج حاصل می شود.

نوسانِ نوسانگر هماهنگ ساده

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \left[\frac{p(0)}{m\omega}\right]\sin\omega t \qquad (2.3.45a)$$

$$p(t) = -m\omega x(0)\sin\omega t + p(0)\cos\omega t \qquad (2.3.45b)$$

علارغم روابط بالا، مقدار چشمداشتی x و p (چیزی که قابل اندازه گیری است) اصلا نوسان نمی کنند! یعنی برای یک حالت با n مشخص، $\langle n|x(t)|n\rangle$ صفر می شود. اگر بخواهیم مشابه کلاسیک نوسان را مشاهده کنیم، باید مقدار چشمداشتی را در حالتی از برهم نهی میان ویژه کت های انرژی اندازه گیری کنیم! مثلا:

$$|\alpha\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$$

سوال: چطور می توانیم ویژه کت هایی را بسازیم که بیشترین شباهت را به کلاسیک داشته باشند؟ به زبان مکانیک موجی ما یک بسته موج می خواهیم که عقب و جلو برود بدون اینکه شکل آن عوض شود (پهن شود!).

جواب: حالت همدوسی که در رابطه ی عملگری زیر صدق کند، این مشکل را حل خواهد کرد.

$$\boxed{a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle}$$

خواص حالت همدوس (ویژه کتِ عملگر افزاینده):

1. When expressed as a superposition of energy (or N) eigenstates,

$$|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)|n\rangle, \tag{2.3.53}$$

the distribution of $|f(n)|^2$ with respect to n is of the Poisson type about some mean value $\bar{n}$:

$$|f(n)|^2 = \left(\frac{\bar{n}^n}{n!}\right)\exp(-\bar{n}). \tag{2.3.54}$$

2. It can be obtained by translating the oscillator ground state by some finite distance.
3. It satisfies the minimum uncertainty product relation at all times.

تمرین

یک حالت همدوس نوسانگر هماهنگ ساده به عنوان ویژه حالت عملگر (غیر هرمیتی) نابودی a و بصورت $|\lambda\rangle = e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}} e^{\lambda a^\dagger}|0\rangle$ تعریف می‌شود.

آ) نشان دهید $|\lambda\rangle$ بهنجار و ویژه حالت عملگر a با ویژه مقدار λ است.

ب) نشان دهید $|\lambda\rangle$ را می‌توان به شکل $|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)|n\rangle$ نیز نوشت که $f(n) = \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}}$ و $|f(n)|^2$ نسبت به n شکل توزیع پواسون را دارد. همچنین نشان دهید محتملترین مقدار n، $|\lambda|^2$ است.

پ) نشان دهید $\langle(\triangle x)^2\rangle\langle(\triangle p)^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4}$، یعنی رابطه عدم قطعیت برای حالتهای همدوس کمینه است.

ت) نمایش $|\lambda\rangle$ در فضای مکان،

$$\psi_\lambda(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-x_0)^2 + i\frac{p_0 x}{\hbar} - i\frac{p_0 x_0}{2\hbar}}$$

را بدست آورید که $\lambda = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x_0 + i\frac{p_0}{m\omega}\right)$، $x_0 = \langle x\rangle_{t=0}$ و $p_0 = \langle p\rangle_{t=0}$ است.

ث) نشان دهید این حالت همدوس را با اعمال عملگر $e^{-\frac{ipl}{\hbar}}$ (که p عملگر تکانه و l جابجایی است) بر حالت زمینه نوسانگر نیز، می‌توان ساخت.

ج) تحول زمانی $|\lambda\rangle$ را بدست آورید و نشان دهید

$$|\psi_\lambda(x,t)|^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}(x-x(t))^2}$$

که $x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{p_0}{m\omega}\sin\omega t$.

چ) نشان دهید بسته موج (حالت همدوس) با گذشت زمان پهن نمی‌شود.